

Il logaritmo su $\mathbb{C}$ “tagliato”

21/10/2025

Definizione 1 Sia Ω una regione di $\mathbb{C}$. Diremo che f è un logaritmo su Ω se $f \in H(\Omega)$ e

$$e^{f(z)} = z, \quad \forall z \in \Omega. \quad (L)$$

Osservazione (i) Poiché $e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, segue che se f è un logaritmo su Ω ¹, allora $0 \notin \Omega$.

(ii) Derivando (L) segue immediatamente che se f è un logaritmo su Ω , allora f è una primitiva di $1/z$:

$$f' = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (P)$$

Esercizio 1 Dimostrare che se f e g sono due logaritmi su Ω , allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$f = g + 2\pi i k, \quad \forall z \in \Omega.$$

Definizione 2 Dato $s \in \mathbb{R}$, chiamiamo l'insieme

$$\Omega_s := \mathbb{C} \setminus \{-re^{is} \mid r \geq 0\}, \quad (C')$$

il piano complesso “tagliato lungo la” (o “privato della”) semiretta che parte dall'origine passa per il punto del cerchio unitario $-e^{is}$.

Si noti che Ω_s è definito modulo 2π , ossia,

$$\Omega_s = \Omega_{s+2\pi k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Nell'Esercizio 2 del file

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AC310_25_26/logaritmo%20principale.pdf

si è visto che la funzione olomorfa

$$\text{Log}_{\Omega_0} := \text{Log} : z \in \Omega_0 \mapsto \text{Log } z := \log r(z) + i\theta(z) \in \Sigma,$$

dove

$$r(z) := |z|, \quad \theta(z) = \theta(x, y) := \text{atan2}(x, y), \quad \Sigma := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| < \pi\},$$

è un logaritmo su Ω_0 ed è tale che $\text{Log } x \in \mathbb{R}$ per ogni $x > 0$. Abbiamo chiamato questa funzione il ramo principale del logaritmo su Ω_0 .

Esercizio 2 Dato $s \in (-\pi, \pi]$, definiamo la seguente funzione su Ω_s ,

$$F_s(z) := is + \text{Log}(e^{-is}z), \quad \forall z \in \Omega_s. \quad (F)$$

(i) Dimostrare che F_s è un logaritmo su Ω_s e che

$$\text{se } 1 \in \Omega_s \implies F_s(1) = 0, \quad \text{se } 1 \notin \Omega_s \implies F_s(-1) = i\pi. \quad (*)$$

¹In questo file Ω denota sempre una regione di $\mathbb{C}$.

(ii) Dimostrare che se f è un logaritmo su Ω_s che soddisfi (*) (ossia $f(1) = 0$ se $1 \in \Omega_s$ e $f(-1) = i\pi$ se $1 \notin \Omega_s$), allora $f = F_s$ su Ω_s .

Definizione 3 Chiameremo la funzione definita in (F), il *ramo principale del logaritmo* su Ω_s e la denoteremo con $\text{Log}_{\Omega_s} z$. Le funzioni definite da

$$\log_{\Omega_s, k} z := 2\pi ki + \text{Log}_{\Omega_s} z, \quad z \in \Omega_s, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

verranno chiamate *rami del logaritmo* su Ω_s ; si noti che $\log_{\Omega_s, 0} = \text{Log}_{\Omega_s}$.

Esercizio 3 (i) Calcolare $\log_{\Omega_s, k} 1$ se $1 \in \Omega_s$ e $\log_{\Omega_s, k}(-1)$ se $1 \notin \Omega_s$. Determinare l'insieme $\log_{\Omega_s, k}(\Omega_s)$.

(ii) Dimostrare che se f è un logaritmo su Ω_s allora, esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$f(z) = \log_{\Omega_s, k} z, \quad \forall z \in \Omega_s.$$